MATHÉMATIQUES I

Algèbre et analyse

OPTION GÉNÉRALE

DURÉE : 4 heures

Avec ce sujet sera distribuée une feuille de papier millimétré.

Attention. — Il ne sera pas fourni de feuille supplémentaire.

L'utilisation de papiers différents apportés par le candidat serait assimilée à une tentative de fraude.

Il est rappelé aux candidats qu'une pénalisation d'un maximum de 2 points (sur 20) sanctionnera le manque de soin apporté à la présentation des copies (fautes d'orthographe, copie peu lisible, ...).

L'épreuve est constituée d'un exercice noté sur 6 points et d'un problème noté sur 14 points.

EXERCICE *(sur 6 points)*

$M_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ (où + et × désignent respectivement l'addition et la multiplication des matrices) est un anneau dont l'élément unité est :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I. On note $M = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1° Calculer $A = \frac{1}{3}(M - I)$ puis A^2.

2° Par convention, on note $M^0 = I$. Démontrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad M^n = I + u_n A$$

avec : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = -2u_n + 3$.

3° Calculer u_n en fonction de n et donner l'expression de M^n en fonction de n.

II. Soit : $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1° Calculer J^2 ; en déduire que J n'est pas inversible dans $M_3(\mathbb{R})$.

2° On considère $E = \{aI + bJ,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

a. Montrer que E est stable pour la multiplication des matrices.

b. Quels sont les éléments de E admettant dans E un symétrique pour la multiplication.

c. Résoudre dans E les équations suivantes : $X^2 = I$
$X^2 = X$

3° On se propose de calculer M^n à l'aide de J.

a. Montrer que M appartient à E.

b. En utilisant la formule du binôme de Newton, en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad M^n = [1 - (-2)^n]J + (-2)^n I$$

III. L'espace vectoriel $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ est rapporté à sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$. Soit j l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans B est J.

1° Déterminer, à l'aide de la méthode du pivot de Gauss, une forme réduite de J.

En déduire la dimension de l'image de j et celle de son noyau.

2° Donner une base de l'image de j ainsi qu'une base de son noyau.

3° Montrer que, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$, $v = x - j(x)$ appartient au noyau de j.

En déduire que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'écrit :

$$x = s + v$$

s appartenant à l'image de j et v au noyau de j.

Vérifier que l'intersection de l'image et du noyau de j est réduite au vecteur nul et en déduire l'unicité du couple (s, v).

PROBLÈME *(sur 14 points)*

A. On rappelle que $\mathcal{F}$, ensemble des applications de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$, muni de l'addition des applications (notée +) et de la multiplication par les réels (notée ·), est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Soit $E = \{f \in \mathcal{F},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = ax + bx(\ln x)^2,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

et $F = \{g \in \mathcal{F},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \alpha + \beta \ln x + \gamma(\ln x)^2,\ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3\}$.

1° Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $(\mathcal{F}, +, \cdot)$. Donner une base B de E et une base B' de F.

2° Soit $f \in E$.

a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Etablir que f' appartient à F.

c. Prouver que l'application D qui à f associe f' est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.

d. Donner la matrice de D relativement aux bases B et B'.

3° Soit $k : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x[1 - (\ln x)^2]$

a. Montrer que k est élément de E et donner ses coordonnées dans B.

b. Déterminer la fonction dérivée de k.

B. Soit $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} x[1 - (\ln x)^2] & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de h dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 5 cm).

1° *a*. Etudier la continuité et la dérivabilité de h sur $\mathbb{R}_+$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation :

$$-(\ln x)^2 - 2\ln x + 1 \geqslant 0$$

c. Déterminer le sens de variation de h.

Tournez la page S.V.P.

Concours National des E.S.C.A.E.
Opt. générale—Math 1
page 281
1987

2° *a*. Quelle est la nature de la branche infinie de $(\mathscr{C})$?

b. Etudier la concavité de h.

c. Donner une équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'inflexion.

3° Construire $(\mathscr{C})$.

4° Soit $F : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \int_{\frac{1}{e}}^{x} h(t)\,dt$$

a. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b. Calculer $F(x)$ pour $x > 0$; en déduire $F(0)$.

c. Soit :

$$A = \{M(x, y),\ 0 \leqslant x \leqslant e \text{ et } |y| \leqslant |h(x)|\}$$

Calculer en cm^2 l'aire de A.

5° Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad h^{(n+2)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{2}{x^{n+1}}(n!)\left[\ln x - \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p}\right]$$

ou $h^{(n+2)}$ désigne la dérivée d'ordre $n+2$ de h.

C 1° *a*. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe θ tel que :

$$\theta \in]0\,;\,1[\quad \text{et} \quad h(x) = xh'(\theta x)$$

b. Démontrer que θ est solution de l'équation :

$$(\ln\theta)^2 + 2(\ln x + 1)\ln\theta + 2\ln x = 0$$

c. Résoudre cette équation. On note θ_1 et θ_2 les solutions $(\theta_1 < \theta_2)$.

2° *a*. Donner la valeur de $\ln\theta_1 + \ln\theta_2$ et de $(\ln\theta_1) \times (\ln\theta_2)$.

b. Montrer que pour $x > 1$, θ_1 et θ_2 appartiennent à $]0\,;\,1[$.

c. Etablir que pour $x \leqslant 1$, θ_1 est élément de $]0, 1[$ et θ_2 appartiennent à $[1\,;\,+\infty[$.

D. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} e^{-1-\ln x-\sqrt{1+(\ln x)^2}} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{e} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

lire : $\begin{cases} e^{1-\ln x-\sqrt{1+(\ln x)^2}} \\ \dfrac{1}{e} \end{cases}$

1° *a*. Montrer que φ est continue en O.

b. φ est-elle dérivable en O ?

c. Calculer $\lim\limits_{+\infty} \varphi$.

2° *a*. Etudier les variations de φ.

b. Construire la représentation graphique (Γ) de φ dans le repère de la partie B.

3° Soit M et N les points d'abscisse x $(x > 0)$ appartenant respectivement à $(\mathscr{C})$ et (Γ) ; H et K désignent les projections orthogonales respectives de N sur l'axe $(O, \vec{i})$ et l'axe $(O, \vec{j})$. On note P le point de coordonnées $(0\,;\,1)$.

a. On désigne par (Δ) la parallèle à la droite (PH) passant par K. Déterminer les coordonnées de l'intersection L de (Δ) et de l'axe $(O, \vec{i})$.

b. Soit M_1 le point de $(\mathscr{C})$ de même abscisse que L. Démontrer que la tangente en M_1 à $(\mathscr{C})$ est parallèle à la droite (OM). On illustrera cette question 3° sur le graphique en donnant à x la valeur 1.